BERECHNUNG DER ANZAHL DER 1-SPITZEN DER PARAMODULAREN GRUPPEN 2-TEN GRADES

D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Helmut Reefschläger
aus Königsberg/Neumark

Göttingen 1973

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534919_0009

BERECHNUNG DER ANZAHL DER 1-SPITZEN DER PARAMODULAREN GRUPPEN 2-TEN GRADES

D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Helmut Reefschläger
aus Königsberg/Neumark

Göttingen 1973

Referent : Prof.Dr.U.CHRISTIAN
Korreferent : Prof.Dr.M.DEURING

Tag der mündlichen Prüfung : 10.5.1973

UNIV. LEIDEN BIBL.

BERECHNUNG DER 1-SPITZEN DER PARAMODULAREN GRUPPEN 2-TEN GRADES

Einleitung

Sei

$$I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

mit nxn Null- und Einheitsmatrizen O,E.Die Gruppe der 2nx2n-Matrizen M,die der Bedingung $M'IM = I$ genügen,nennt man die symplektische Gruppe $\Sigma(n,R)$,wobei die Elemente von M reell sind.In $\Sigma(n,R)$ liegt die Siegelsche Modulgruppe $\Gamma(n)$,die aus allen M mit ganzzahligen Elementen besteht.Enthalten in $\Gamma(n)$ sind die Hauptkongruenzgruppen q-ter Stufe $\Gamma(n,q)$, deren Matrizen M durch $M \equiv E \bmod q$ mit ganzem q gekennzeichnet sind.Schließlich bezeichnet man eine $\Gamma(n,q)$ von endlichem Index enthaltende Gruppe $\curlywedge < \Sigma(n,R)$ als Kongruenzgruppe q-ter Stufe zu $\Gamma(n)$.Man kann $\curlywedge$ zu einer diskontinuierlichen Gruppe biholomorpher Abbildungen der oberen Halbebene n-ten Grades - das ist die Menge aller symmetrischen nxn Matrizen $Z = X + iY$ mit positivem Y - auf sich machen und einen Fundamentalbereich konstruieren,der endlich viele "Spitzen" hat.U.CHRISTIAN [2] definiert,was man unter einer j-Spitze von $\curlywedge$ zu verstehen hat ($1 \leq j \leq n$).

Sei F eine Diagonalmatrix,deren Diagonalelemente $f_1, f_2, \ldots, f_n$ natürliche Zahlen mit der Teilbarkeitseigenschaft $f_1 | f_2 | \ldots | f_n$ sind . Ferner sei

$$J = \begin{pmatrix} 0 & F \\ -F & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.Alle 2nx2n Matrizen M mit reellen Elementen,die $M'JM=J$ erfüllen,bilden die parasymplektische Gruppe.Die Untergruppe, die aus allen ganzen M besteht,heißt die paramodulare Gruppe $\Gamma(n,F)$.Diese Gruppen treten in der Theorie der Abelschen Funktionen auf und sind Verallgemeinerungen der Modulgruppe n-ten Grades.Man kann genau wie oben Hauptkongruenzgruppen $\Gamma(n,F,q)$ und Kongruenzgruppen $\curlywedge^*$ zu $\Gamma(n,F)$ definieren, wobei jetzt $\curlywedge^*$ zu einer diskontinuierlichen Gruppe biholomorpher Abbildungen der verallgemeinerten oberen Halbebene n-ten Grades - das ist die Gesamtheit der n-reihigen Matrizen $Z = X + iY$ mit $F^{-1}Z'F = Z$ und $FY > 0$ - gemacht werden kann.

Die Anzahl der Spitzen eines Fundamentalbereiches von Ψ^* kann man berechnen, indem man Ψ^* durch $[F,E]\,\Psi\,[F,E]^{-1} = \Psi$ in eine Kongruenzgruppe Ψ zu $\Gamma(n)$ transformiert. Dabei ist

$$[F,E] = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} .$$

In dieser Arbeit ist $n = 2$, $\Psi^* = \Gamma(2,F)$, und man beachte noch $\Gamma(2,F) = \Gamma(2,F^*)$ mit

$$F^* = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix}, \quad f = f_2 f_1^{-1} \quad , \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} .$$

Die Anzahl der 1-Spitzen von $\Psi(2,F) = [F,E]\,\Gamma(2,F)\,[F,E]^{-1}$ entspricht der Anzahl der Äquivalenzklassen, in die $\Gamma(2)$ bezüglich folgender Relation zerfällt: $M_1, M_2 \in \Gamma(2)$ sind genau dann äquivalent, wenn es ein $P \in \Psi(2,F)$ und ein $S \in \Sigma_1(2,\mathbb{R})$ - das ist diejenige Untergruppe von $\Sigma(2,\mathbb{R})$, die aus allen

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & b & * \\ * & * & * & * \\ c & 0 & d & * \\ 0 & 0 & 0 & *^{-1} \end{pmatrix}$$

besteht - gibt so, daß $PM_1 = M_2 S$ gilt.
$\Psi(2,F)$ ist Kongruenz gruppe der Stufe f zu $\Gamma(2)$. Das Ergebnis ist überraschend einfach; Die Anzahl der 1-Spitzen von $\Psi(2,F)$ ist gleich der Anzahl der Teiler von f.

Die §§ 1,2,3 dienen der Einführung; Es wird über die Siegelsche Modulgruppe (§1), die Spitzen Siegelscher Modulgruppen (§2) und über die paramodularen Gruppen (§3) gesprochen. In §4 wird zunächst der Gruppenindex $[\Gamma(2) : \Psi(2,F) \cap \Gamma(2)]$ (Hilfssatz 4.3) berechnet und ein für die weiteren Überlegungen geeignetes Repräsentantensystem dieser Zerlegung konstruiert (Hilfssatz 4.7). Im folgenden Paragraphen 5 werden gewisse Repräsentanten dieser Zerlegung durch Multiplikation von rechts mit Elementen aus $\Gamma_1(2)$ -das sind alle ganzen Matrizen aus $\Sigma_1(2,\mathbb{R})$ - identifiziert (Hilfssatz 5.3). Schließlich werden die so entstandenen Äquivalenzklassen noch nach den rationalen Teilen der Gruppen $\Psi(2,F)$ und $\Sigma_1(2,\mathbb{R})$ reduziert (Hilfssätze 5.5 , 5.6). Am Ende des §5 steht dann unser Ergebnis.

Kapitel I Einführung

§1 Die Siegelsche Modulgruppe n-ten Grades

Man setze

$$I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

mit nxn Null- und Einheitsmatrizen O,E.Es sei $\Sigma(n,\mathbb{R})$ bzw. $\Sigma(n,\mathbb{Q})$ die reelle bzw.rationale symplektische Gruppe,bestehend aus allen 2nx2n Matrizen M mit reellen bzw. rationalen Elementen,welche der Gleichung

$$M'IM = I \tag{1}$$

genügen.M' bedeutet dabei die zu M transponierte Matrix. Mit nxn Matrizen A,B,C,D bilde man

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Die Bedingung (1) besagt,daß die drei Gleichungen

$$A'C = C'A$$
$$B'D = D'B$$
$$A'D - C'B = E$$

gelten sollen.Wegen $I^{-1} = -I$ und (1) gilt auch

$$MIM' = I ,$$

also

$$AB' = BA'$$
$$CD' = DC'$$
$$AD' - BC' = E .$$

Ferner gilt

$$M^{-1} = -IM'I = \begin{pmatrix} D' & -B' \\ -C' & A' \end{pmatrix} .$$

M heißt ganz,wenn alle Elemente von M ganze Zahlen sind.Enthalten in $\Sigma(n,\mathbb{Q})$ ist die Siegelsche Modulgruppe n-ten Grades $\Gamma(n)$,welche alle ganzen M umfaßt.Schließlich definiert man durch die Bedingung

$$M \equiv E \bmod q \tag{2}$$

die Hauptkongruenzgruppe q-ter Stufe $\Gamma(n,q)$ zu $\Gamma(n)$.Dabei ist q eine natürliche Zahl.Eine Untergruppe $\Psi \subset \Sigma(n,\mathbb{R})$ mit

$$\Psi \supset \Gamma(n,q) \text{ und } [\Psi : \Gamma(n,q)] < \infty$$

heißt Kongruenzgruppe q-ter Stufe zu $\Gamma(n)$.Dabei ist der Index von $\Gamma(n,q)$ in Ψ mit $[\Psi : \Gamma(n,q)]$ bezeichnet.

§2 Spitzen Siegelscher Modulgruppen

1.Es sei $\mathfrak{Z}(n)$ die obere Halbebene n-ten Grades,bestehend aus sämtlichen symmetrischen nxn Matrizen $Z = X+iY$ mit positivem Imaginärteil.Man setze

$$M \langle Z \rangle = (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \quad .$$

Dann wird Ψ zu einer diskontinuierlichen Gruppe biholomorpher Abbildungen von $\mathfrak{Z}(n)$ auf sich. Zu Ψ kann man einen Fundamentalbereich konstruieren,der endlich viele Spitzen hat.Die Anzahl der Spitzen hängt nicht von der speziellen Wahl des Fundamentalbereiches ab,wenn man zwei Spitzen,die durch Transformation von Ψ ineinander überführt werden,als nicht verschieden betrachtet.Transformiert man die Spitze,die man untersuchen will,nach unendlich,so kann man sie beschreiben,indem man in Y gewisse Diagonalelemente unendlich werden läßt. Die Spitze hängt davon ab,wieviele dieser Diagonalelemente von Y unendlich werden.Man sagt daher,die Spitze sei eine j-Spitze,wenn genau die letzten j Diagonalelemente von Y nach unendlich streben ($1 \leq j \leq n$).Genauso definiere man die Anzahl der j-Spitzen von Ψ :

2.Man bezeichne mit $\Sigma_j(n,\mathbb{R})$ bzw. $\Sigma_j(n,\mathbb{Q})$ bzw. $\Gamma_j(n)$ die untergruppe von $\Sigma(n,\mathbb{R})$ bzw. $\Sigma(n,\mathbb{Q})$ bzw. $\Gamma(n)$,die aus allen

Matrizen der folgenden Art besteht mit (n-j)x(n-j) Matrizen A_j, B_j, C_j, D_j und einer jxj Matrix P_j :

$$\begin{pmatrix} A_j & 0 & B_j & * \\ * & P_j' & * & * \\ C_j & 0 & D_j & * \\ 0 & 0 & 0 & P_j^{-1} \end{pmatrix}$$

Zwei Matrizen $R, W \in \Sigma(n,\mathbb{Q})$ nenne man (Ψ, j)-äquivalent, wenn

$$R^{-1}\Psi W \cap \Sigma_j(n,R) \neq \emptyset \tag{3}$$

gilt.

Nach Ergebnissen von M.KOECHER [4] und U.CHRISTIAN [2] ist jedes $R \in \Sigma(n,\mathbb{Q})$ einem $W \in \Gamma(n)$ äquivalent. Also kann man in (3) $R, W \in \Gamma(n)$ wählen, und es gibt nur endlich viele (Ψ, j)-Äquivalenzklassen. Ihre Anzahl $A(\Psi, j)$ bezeichnet man als die Anzahl der j-Spitzen von Ψ.

U.CHRISTIAN [2] hat für den Fall, daß Ψ Normalteiler von $\Gamma(n)$ ist, eine Formel angegeben :

$$A(\Psi, j) = \frac{[\Gamma(n) : \Psi]}{[\Gamma_j(n) : \Psi_j]} \quad .$$

§3 Paramodulare Gruppen

Einem System von $\sigma_\lambda \times \sigma_\lambda$ Matrizen M_λ ($\lambda = 1,2,..,h$) werde die $(\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_h)$-reihige quadratische Matrix

$$[M_1,\ldots,M_h] = \begin{pmatrix} M_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_h \end{pmatrix}$$

zugeordnet.

Gegeben seien ganze Zahlen $g_1, g_2, \ldots, g_n$. Ihr nicht negativ genommener größter gemeinsamer Teiler werde mit $\langle g_1,\ldots,g_n \rangle$ bezeichnet.

Es bedeute $F = [f_1, f_2, \ldots, f_n]$ eine positive rationale Diagonalmatrix, wobei die Quotienten $f_{ik} = f_k f_i^{-1}$ $(1 \le i \le k \le n)$ ganze Zahlen seien. Nun setze man

$$J = [F,F]\,I = I\,[F,F] = \begin{vmatrix} 0 & F \\ -F & 0 \end{vmatrix} .$$

Es sei $S(n,F)$ bzw. $P(n,F)$ die reelle bzw. rationale parasymplektische Gruppe, bestehend aus allen $2n \times 2n$ Matrizen mit reellen bzw. rationalen Elementen, die der Bedingung

$$M'JM = J \tag{4}$$

genügt.

Die paramodulare Gruppe $\Gamma(n,F)$ besteht aus allen ganzen Matrizen $M \in P(n,F)$. Ferner definiert man durch (2) die Hauptkongruenzgruppe q-ter Stufe $\Gamma(n,F,q)$ zu $\Gamma(n,F)$. Schließlich heißt eine Untergruppe $\Psi < S(n,F)$ eine Kongruenzgruppe q-ter Stufe zu $\Gamma(n,F)$, wenn

$$\Psi > \Gamma(n,F,q) \quad \text{und} \quad [\Psi : \Gamma(n,F,q)] < \infty$$

gilt.

Wir wollen den Fall $n = 2$ betrachten. Man setze

$$F^* = \begin{vmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{vmatrix}, \quad f = f_{12}, \quad F = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f \end{vmatrix}.$$

Dann gilt nach [1, Satz 1] die Beziehung $\Gamma(2,F^*) = \Gamma(2,F)$, und wir können daher für unsere Betrachtungen die Matrix F wählen. Nun soll noch [1, Hilfssatz 6] in später benötigter Form zitiert werden als

Hilfssatz 3.1 : $m = (a_{11}\ a_{21}\ c_{11}\ c_{21})'$ ist genau dann die erste Spalte einer Matrix $M \in \Gamma(2,F)$ mit

$$F = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f \end{vmatrix}, \text{ f ganz, wenn die Beziehung}$$

$$\langle a_{11}, fa_{21}, c_{11}, fc_{21} \rangle = 1 \quad \text{gilt.}$$

Es sei $\mathfrak{Z}^*(n)$ die Gesamtheit der komplexen nxn Matrizen $Z = X+iY$ mit $F^{-1}Z'F = Z$ und $FY > 0$. $\mathfrak{Z}^*(n)$ heißt die verallgemeinerte obere Halbebene n-ten Grades. Die Substitution $Z \longrightarrow M\langle Z\rangle$ (wie in §2 erklärt) stellt eine biholomorphe Abbildung von $\mathfrak{Z}^*(n)$ auf sich dar. Durch die Transformation

$$[F,E]\ S(n,F)\ [F,E]^{-1} = \Sigma(n,R) \tag{5}$$

wird jede Kongruenzgruppe Ψ^* zu $\Gamma(n,F)$ in eine Kongruenzgruppe zu $\Gamma(n)$ transformiert, und es gelten im wesentlichen alle Sätze über Modulfunktionen und Modulformen. Aus der Definition der Kongruenzgruppe q-ter Stufe zu $\Gamma(n,F)$ ersieht man, daß $\Gamma(n,F)$ selbst Kongruenzgruppe q-ter Stufe ist. Sei nun $n = 2$ und F wie in Hilfssatz 3.1 definiert.

Hilfssatz 3.2 : Eine Matrix

$$M^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & b_{11}^* & b_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & b_{21}^* & b_{22}^* \\ c_{11}^* & c_{12}^* & d_{11}^* & d_{12}^* \\ c_{21}^* & c_{22}^* & d_{21}^* & d_{22}^* \end{pmatrix} \in \Gamma(2,F)$$

ist durch folgende Bedingungen gekennzeichnet:

$$a_{12}^* \equiv b_{12}^* \equiv c_{12}^* \equiv d_{12}^* \equiv 0 \bmod f, \tag{6}$$
$$a_{ik}^*\ ,\ b_{ik}^*\ ,\ c_{ik}^*\ ,\ d_{ik}^*\ \text{ganz sonst.}$$

Beweis: Mit M gehört auch $[F,F]^{-1}M'[F,F]$ zu $\Gamma(2,F)$. Daraus folgt die Behauptung.

Nach (5) ist $[F,E]\ \Gamma(2,F)\ [F,E]^{-1}$ Kongruenz gruppe der Stufe f zu $\Gamma(2,)$ und i.a. nicht Normalteiler von $\Gamma(2)$. Wir setzen noch $\Psi(2,F) = [F,E]\ \Gamma(2,F)\ [F,E]^{-1}$.
Im folgenden Kapitel werden wir die Anzahl der Spitzen $A(\Psi(2,F),1)$ berechnen.

§4 Berechnung des Index $[\Gamma(2) : \Psi(2,F) \cap \Gamma(2)]$ und Konstruktion eines Repräsentantensystems der Zerlegung von $\Gamma(2)$ nach $\Psi(2,F) \cap \Gamma(2)$.

Hilfssatz 4.1 : Es sei M aus der rational symplektischen Gruppe $\Sigma(n,\mathbb{Q})$. Die Bedingungen

(7) $a_{21} \equiv b_{21} \equiv b_{22} \equiv b_{12} \equiv d_{12} \equiv 0 \bmod f$;
$a_{22},a_{11},a_{12},b_{11},d_{11},d_{21},d_{22},c_{11},c_{12},c_{21}$ ganz;
fc_{22} ganz

sind notwendig und hinreichend dafür, daß

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{aus } \Psi(2,F) \text{ ist.}$$

Beweis : (i) Man wende auf eine Matrix $M^* \in \Gamma(2,F)$ mit den in (6) gekennzeichneten Komponenten die Transformation (5) an und erhält (7).

(ii) Sei eine symplektische Matrix mit den Bedingungen (7) gegeben. Dann genügt $[F,E]^{-1} M [F,E] = M^*$ der Bedingung (4) und ist ganz, also $M^* \in \Gamma(2,F)$, mithin ist $M \in \Psi(2,F)$.

Hilfssatz 4.2 : (i) $\Psi(2,F) \cap \Gamma(2)$ ist Untergruppe von $\Gamma(2)$.

(ii) Eine symplektische Matrix, die den Bedingungen (7) genügt, ist genau dann $\in \Psi(2,F) \cap \Gamma(2)$, wenn c_{22} ganz ist; Ferner gilt dann $\langle a_{22},f \rangle = \langle d_{22},f \rangle = 1$.

Beweis : (i) trivial.

(ii) Die Bedingung ist natürlich notwendig. Erfülle nun eine symplektische Matrix M die Bedingung (7) und sei c_{22} ganz, d.h., $M \in \Gamma(2)$. Dann genügt die Matrix $[F,E]^{-1} M [F,E] = M^*$ der Bedingung (4) und ist ganz, also $M^* \in \Gamma(2,F)$ und damit $M \in \Psi(2,F)$. Es folgt $M \in \Psi(2,F) \cap \Gamma(2)$. Ferner müssen die Zeilen und Spalten von M teilerfremd sei, aus (7) folgt daher $\langle a_{22},f \rangle = \langle d_{22},f \rangle = 1$.

Hilfssatz 4.3 :

$$j(2,F) = [\Gamma(2) : \Phi(2,F) \cap \Gamma(2)] = \frac{f^4 \prod_{p|f} (1-p^{-4})}{f \prod_{p|f} (1-p^{-1})}$$

Dabei durchlaufe p alle Primteiler von f.

Beweis :

Der Index $[\Gamma(2) : \Gamma(2,f)]$ wurde von M. KOECHER [3] zu $f^{10} \prod_{p|f} \prod_{k=1}^{2} (1-p^{-2k})$ berechnet.

Wir berechnen jetzt den Index $[\Phi(2,F) \cap \Gamma(2) : \Gamma(2,f)]$. Aus diesen beiden Indizes erhält man $j(2,F)$.

Man definiere für eine Untergruppe Φ von $\Gamma(2)$, wenn e die erste vierreihige Einheitsspalte bedeutet:

$$\triangle_f \Phi = \{M \in \Phi \mid M = (m * * *),\ m \equiv e \bmod f\} \quad ,$$
$$\triangle \Phi = \{M \in \Phi \mid M = (m * * *),\ m = e\} \quad ;$$

Die Matrizen aus $\triangle \Phi$ besitzen folgende Gestalt

$$(8) \qquad \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ 0 & a_{22} & b_{21} & b_{22} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c_{22} & d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \quad ;$$

$$\nabla_f \Phi = \{M \in \triangle \Phi \mid a_{12} \equiv b_{12} \equiv 0 \bmod f\} \quad ,$$
$$\nabla \Phi = \{M \in \triangle \Phi \mid a_{12} = b_{12} = 0\} \quad ;$$

Die Matrizen aus $\nabla \Phi$ besitzen die Gestalt

$$(9) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & b_{22} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & d_{22} \end{pmatrix} \quad ;$$

$$\square_f \Phi = \{M \in \nabla \Phi \mid b_{11} \equiv 0 \bmod f\} ,$$
$$\square \Phi = \{M \in \nabla \Phi \mid b_{11} = 0\} .$$

Nun wollen wir die folgenden Gleichungen beweisen :

(i) $\varsigma = [\Delta_f(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2)) : \Gamma(2,f)] = [\Delta(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2)):\Delta\Gamma(2,f)] = \sigma$,

(ii) $\eta = [\nabla_f(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2)):\Delta\Gamma(2,f)] = [\nabla(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2)):\nabla\Gamma(2,f)] = \tilde{\varsigma}$,

(iii) $[\square_f(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2)):\nabla\Gamma(2,f)] = [\square(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2)):\square\Gamma(2,f)]$.

Zu (i) : Angenommen, $M_1,\dots,M_\sigma$ repräsentieren die verschiedenen Nebenklassen von $\Delta(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2))$ modulo $\Delta\Gamma(2,f)$. Wegen $\Delta\Gamma(2,f) = \Delta(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2))\wedge\Gamma(2,f)$ liegen $M_1,\dots,M_\sigma$ in verschiedenen Nebenklassen bezüglich $\Gamma(2,f)$, also $\sigma \leq \varsigma$.
Gelte jetzt

$$\Delta_f(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2)) = \bigcup_{\nu=1}^{\varsigma} \Gamma(2,f)M_\nu^* .$$

Die erste Spalte eines jeden M_ν^* ($1 \leq \nu \leq \varsigma$) genügt nach Hilfssatz 3.1 und (7) den Bedingungen:

$$\langle a_{11}, a_{21}, c_{11}, fc_{21}\rangle = 1 ,$$
$$a_{11} \equiv 1 \bmod f,\ a_{21} \equiv c_{11} \equiv c_{21} \equiv 0 \bmod f ,$$

ist also auch die erste Spalte eines $\mathring{M}_\nu \in \Gamma(2,f)$. Wir setzen $M_\nu = \mathring{M}_\nu^{-1} M_\nu^* \in \Delta(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2))$ und erhalten

$$\Delta_f(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2)) = \bigcup_{\nu=1}^{\varsigma} \Gamma(2,f)M_\nu .$$

Die M_ν liegen in verschiedenen Restklassen modulo $\Gamma(2,f)$, also auch in verschiedenen Restklassen modulo $\Delta\Gamma(2,f)$. Hieraus folgt $\sigma \geq \varsigma$, also insgesamt Die Behauptung (i).

Zu (ii): Wie bei (i) bekommt man $\tilde{\varsigma} \leq \eta$.

Gelte nun

$$\nabla_f(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2)) = \bigcup_{\nu=1}^{\eta} M_\nu \triangle\Gamma(2,f) \quad .$$

Man kann erreichen, daß die $M_\nu \in \nabla(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2))$ sind, indem man von rechts mit

$$\begin{pmatrix} 1 & -a_{12} & 0 & -b_{12} \\ 0 & 1 & b_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{12} & 1 \end{pmatrix} \in \triangle\Gamma(2,f)$$

multipliziert. Daraus folgt $\eta \leq \xi$, insgesamt also die Behauptung (ii).

Die Gleichung (iii) beweist man analog (ii). Damit ergibt sich

$$[\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2,f) : \Gamma(2,f)] =$$
$$[\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2) : \triangle_f(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2))] \times [\triangle(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2)) : \nabla_f(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2))] \times$$
$$[\nabla(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2)) : \square_f(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2))] \times [\square(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2)) : \square\Gamma(2,f)] \quad .$$

1. Seien $M_1, M_2 \in \triangle(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2))$, also der Art (8) mit den Bedingungen (7) gegeben, und gelte noch $a_{12}^{(1)} \equiv a_{12}^{(2)} \bmod f$. Dann liegen M_1, M_2 in $\nabla_f(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2))$. Außerdem sind die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{12}^{(\nu)} & 1 \end{pmatrix} \quad , (\nu = 1,2),$$

aus $\triangle(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2))$, und durch Multiplikation von M_1 mit Matrizen aus $\nabla_f(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2))$ von links erkennt man, daß M_1, M_2 für $a_{12}^{(1)} \not\equiv a_{12}^{(2)} \bmod f$ nicht zu derselben Nebenklasse der Zerlegung von $\triangle(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2))$ gehören. Aus diesen Bemerkungen folgt

$$[\triangle(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2)) : \nabla_f(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2))] = f \quad .$$

2.Aus zu 1. analogen Betrachtungen und (9) folgt

$$\left[\nabla(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2)):{}^{\Gamma}{}_{f}(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2))\right] = f \quad .$$

3.Es ist $\left[\square(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2)):\square\Gamma(2,f)\right]=\left[\chi(1,f):\Gamma(1,f)\right]$, wobei $\chi(1,f)$ die Untergruppe der elliptischen Modulgruppe mit den Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad , \quad b \equiv 0 \bmod f \quad ,$$

bezeichnet.Den Index $\left[\Gamma(1):\chi(1,f)\right] = f\prod_{p|f}(1+p^{-1})$ hat H.KLINGEN [5] berechnet.Alsohaben wir

$$\left[\chi(1,f):\Gamma(1,f)\right] = \frac{\left[\Gamma(1):\Gamma(1,f)\right]}{\left[\Gamma(1):\chi(1,f)\right]} = f^2\prod_{p|f}(1-p^{-1}) \quad .$$

4.Nun bleibt noch $\left[\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2):\Delta_f(\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2))\right] = \varkappa(f)$ zu berechnen.Dabei bedeutet $\varkappa(f)$ die Anzahl der mod f inkongruenten teilerfremden ersten Spalten $m =(a_{11}\ a_{21}\ c_{11}\ c_{21})'$ von Matrizen aus $\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2)$.Nach Hilfssatz 3.1 und (7) ist $\varkappa(f)$ die Anzahl der Spalten m mit den Nebenbedingungen

$$\left\langle a_{11},a_{21},c_{11},fc_{21},f\right\rangle = 1 \quad ,$$
$$a_{21} \equiv 0 \bmod f \quad .$$

Die Anzahl der mod f inkongruenten Paare a_{11},c_{11} mit $\left\langle a_{11},c_{11},f\right\rangle = 1$ ist nach bekannten Schlüssen gleich $f^2\prod_{p|f}(1-p^{-2})$. Aus $\left\langle a_{11},c_{11},f\right\rangle = 1$ folgt aber auch $\left\langle a_{11},c_{11},fc_{21},f\right\rangle = 1$ für beliebiges c_{21}.Da $a_{21} \equiv 0 \bmod f$ ist,folgt

$$\varkappa(f) = f^3\prod_{p|f}(1-p^{-2}) \quad .$$

Aus 1.,2.,3.,4. ergibt sich

$$\left[\Psi(2,F)\wedge\Gamma(2):\Gamma(2,f)\right] = f^7\prod_{p|f}\prod_{k=1}^{2}(1-p^{-k}),\text{also}$$

$$j(2,F) = \frac{f^4\prod_{p|f}(1-p^{-4})}{f\prod_{p|f}(1-p^{-1})} \quad .$$

Hilfssatz 4.4 : $M_1, M_2 \in \Gamma(2)$ liegen genau dann in derselben Rechtsnebenklasse der Zerlegung von $\Gamma(2)$ nach $\Psi(2,F) \cap \Gamma(2)$, wenn es ein Element t aus der primen Restklassengruppe mod f, die wir mit T_f bezeichnen wollen, gibt so, daß

(10) $$m_1 \equiv t m_2 \bmod f$$

für die zweiten Zeilen m_1 von M_1 und m_2 von M_2 gilt.

Beweis : Aus Hilfssatz 4.2 folgert man : Multipliziert man eine Modulmatrix von links mit einem $P \in \Psi(2,F) \cap \Gamma(2)$, so ändert sich die zweite von M nur um einen Faktor t mod f mit $t \in T_f$, d.h., die notwendige Bedingung für die Zugehörigkeit zweier Modulmatrizen M_1, M_2 zu derselben Rechtsnebenklasse modulo $\Psi(2,F) \cap \Gamma(2)$ ist also durch die Bedingung (10) gegeben.
Der Hilfssatz 4.3 zeigt nun aber, daß diese notwendige Bedingung auch hinreichend ist : $f^4 \prod_{p|f} (1 - p^{-4})$, also der Zähler von j(2,F), ist nämlich gerade gleich der Anzahl der mod f inkongruenten vierelementigen, teilerfremden Zeilen, und $f \prod_{p|f} (1 - \bar{p}^1)$, also der Nenner von j(2,F), entspricht der Ordnung der primen Restklassengruppe mod f, T_f.

Hilfssatz 4.5 : Zu jeder vierelementigen Zeile $m = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ ganzer Zahlen a_ν ($\nu = 1,2,3,4$), $\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle = 1$, gibt es ein $t \in T_f$ und eindeutig bestimmte ganze Zahlen h, g mit $h|g|f$ so, daß

$$tm \equiv (k_1 h, g, k_2 h, \tau) \bmod f$$

gilt mit ganzen Zahlen k_1, k_2, τ. Dabei ist $\langle k_1, k_2, gh^{-1} \rangle = 1$.

Beweis : (i) Man setze $\langle a_2, f \rangle = g$. Dann ist die Kongruenz

(11) $$a_2 y \equiv g \bmod f$$

lösbar in ganzem y. Man kann sogar ein zu f teilerfremdes y wählen; Die Lösbarkeit von (11)

ist nämlich gleichbedeutend mit der Lösbarkeit von

$$a_2^* \cdot y \equiv 1 \bmod fg^{-1} \quad ,$$

wobei $a_2 = a_2^* \cdot g$ ist und $\langle a_2^*, fg^{-1} \rangle = 1$. Somit ist (11) mit einer primen Restklasse $y \bmod fg^{-1}$ lösbar. Nach dem Dirichlet'schen Primzahlsatz gibt es in der primen Restklasse $y \bmod fg^{-1}$ unendlich viele Primzahlen. Also kann man zur Lösung von (11) eine Primzahl $y = t$ wählen mit $\langle t, f \rangle = 1$. Mithin gilt $tm \equiv (a_1^*, g, a_3^*, a_4^*) \bmod f$.

(ii) Man setze nun $\langle a_1^*, a_3^* \rangle = w$ und definiere $h = \langle g, w \rangle$. Dann gibt es ganze r,s mit $hr = w$ und $hs = g$, und es gelten die Gleichungen $a_1^* = v_1 rh$, $a_3^* = v_2 rh$ mit ganzen v_1, v_2. Mit $k_1 = v_1 r$ und $k_2 = v_2 r$ folgt $(a_1^*, a_3^*) = (k_1 h, k_2 h)$.

(iii) Für die unter (ii) eingeführten Parameter gelten die Beziehungen $\langle r,s \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle = 1$, folglich $\langle k_1, k_2, gh^{-1} \rangle = \langle v_1 r, v_2 r, s \rangle = 1$. Ferner sind gemäß Konstruktion h und g eindeutig bestimmt, und es gilt $h \mid g \mid f$. Man setze noch $a_4^* = \tau$ und hat mit (i), (ii), (iii) den Hilfssatz 4.5 vollständig bewiesen.

Wir schließen nun noch einen im Inhalt bekannten Hilfssatz an.

Hilfssatz 4.6 : Eine vierelementige Zeile $m = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ ganzer Zahlen a_ν ($\nu = 1,2,3,4$) ist genau dann die zweite Zeile einer Modulmatrix, wenn $\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle = 1$ gilt.

Also kann man zu jedem $m = (k_1 h, g, k_2 h, \tau)$ mit $\langle k_1 h, g, k_2 h, \tau \rangle = 1$ eine Modulmatrix $M(f; g, h, k_1, k_2, \tau)$ finden, deren zweite Zeile m ist.

Hilfssatz 4.7 : Zu jeder Modulmatrix N existiert ein $P \in \Psi(2,F) \cap \Gamma(2)$ und ein $M(f; g, h, k_1, k_2, \tau)$ der in Hilfssatz 4.6 beschriebenen Art so, daß $PN = M(f;, g, h, k_1, k_2, \tau)$ gilt.

Beweis : Der Hilfssatz 4.7 ist eine Folgerung aus den Hilfssätzen 4.4, 4.5, 4.6.

§5 Berechnung von $A(\Psi(2,F),1)$

Hilfssatz 5.1 : Es seien ganze Zahlen h,g,f,k_1,k_2,τ mit den Bedingungen $h \mid g \mid f$; $\langle k_1,k_2,gh^{-1}\rangle = 1$ und $\langle k_1h,g,k_2h,\tau\rangle = 1$ sowie $\tau^* = \tau + kh$ mit $k = \langle k_1,k_2\rangle$ gegeben. Zu jedem $m = (k_1h,g,k_2h,\tau)$ gibt es ein $G \in \Gamma_1(2)$ so, daß

$$mG = (0,g,h,\tau^*) \tag{12}$$

erfüllt ist.

Beweis : $\Gamma_1(2)$ besteht aus allen symplektischen ganzen

$$G = \begin{pmatrix} a & 0 & b & * \\ * & \pm 1 & * & * \\ c & 0 & d & * \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} .$$

(i) Es sei $k = \langle k_1,k_2\rangle$. Es gibt eine Matrix

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$$

mit $(k_1h,k_2h)U = (0,kh)$. Also existiert ein

$$G^* = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_1(2)$$

so, daß $mG^* = (0,g,kh,\tau) = m^*$ ist.

(ii) Wegen $\langle k,gh^{-1}\rangle = 1$ gibt es eine Matrix

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$$

mit $(gh^{-1},k)\tilde{U} = (1,0)$.

Nun setze man

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} -\tilde{b} & 0 & -\tilde{a} & 0 \\ \tilde{b} & 1 & \tilde{a} & 0 \\ \tilde{c} & 0 & \tilde{d} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_1(2);$$

dann erhält man $m\tilde{G} = (0,g,h,\tau^*)$. Mit $G = \overset{*}{G}\tilde{G}$ verifiziert man (12).

Hilfssatz 5.2 : Jede teilerfremde Zeile $m = (0,g,h,\tau^*)$ läßt sich zu einer Modulmatrix folgender Art ergänzen:

$$(13) \qquad M(f;g,h,t) = \begin{pmatrix} -\tau^* + gh^{-1}c & h & -t & c \\ 0 & g & h & \tau^* \\ -\tau^* & h & 0 & 0 \\ c & t & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beweis : Es gilt $h \mid g$ und $\langle g,h,\tau^* \rangle = 1$. Daraus folgt $\langle h,\tau^* \rangle = 1$. Mithin gibt es ganze Zahlen c,t mit $hc + \tau^* t = -1$. Damit ist $M(f;g,h,t)$ Modulmatrix.

Hilfssatz 5.3 : Jedes $M \in \Gamma(2)$ ist zu einem $M(f,g,h,t)$ der Art (13) $(\Psi(2,F) \cap \Gamma(2),1)$-äquivalent.

Beweis : M ist zu $M(f;g,h,t)$ nach (3) genau dann $(\Psi(2,F) \cap \Gamma(2),1)$-äquivalent, wenn es ein $P \in \Psi(2,F) \cap \Gamma(2)$ und ein $G \in \Gamma_1(2)$ mit

$$(14) \qquad PM = M(f;g,h,t)G$$

gibt.
Nun setze man $N = M$ und erhält nach Hilfssatz 4.7 die Existenz eines $\overset{*}{P} \in \Psi(2,F) \cap \Gamma(2)$ mit $\overset{*}{P}M = M(f;g,h,k_1,k_2,\tau)$. Nach den Hilfssätzen 5.1, 5.2, 4.4 gibt es Matrizen $\mathring{P} \in \Psi(2,F) \cap \Gamma(2)$ und $\mathring{G} \in \Gamma_1(2)$ so, daß $\mathring{P}M(f;g,h,k_1,k_2,\tau)\mathring{G} = M(f;g,h,t)$ gilt. Man setze $P = \mathring{P}\overset{*}{P}$, $G = \mathring{G}^{-1}$ und erhält (14).

Hilfssatz 5.4 : Die Matrizen $M(f;g,h,t)$ und $M(f;gh^{-1},1,-1)$ sind $(\Psi(2,F),1)$-äquivalent; Dabei sind in $M(f;gh^{-1},1,-1)$ der Gestalt (13) noch $\tau^* = 1$, $c = 0$ gewählt.

Beweis : Zwei Modulmatrizen M_1, M_2 sind nach (3) genau dann $(\Psi(2,F),1)$-äquivalent, wenn es Matrizen $P \in \Psi(2,F)$, $S \in \sum_f(2,R)$ gibt mit $PM_1 = M_2S$.
Man setze nach (13)

$$(15) \qquad M(f;gh^{-1},1,-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & gh^{-1} & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ferner

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -g^{-1}(h+t) & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Psi(2,F)$$

sowie $M(f;g,h,t)$ wie in (13) und verifiziere

$$M(f;gh^{-1},1,-1)^{-1} \cdot P \cdot M(f;g,h,t) \in \sum_f(2,R) .$$

Hilfssatz 5.5 : Zu jedem $M \in \Gamma(2)$ gibt es einen Teiler ϱ von f so, daß M zu

$$(16) \qquad M(\varrho) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho & 1 & 0 \\ \varrho & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma(2)$$

$(\Psi(2,F),1)$-äquivalent ist.

Beweis : Man setze

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -\varrho & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_1(2),$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ -1 & 1 & 1-\varrho & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \Psi(2,F) \cap \Gamma(2)$$

und erhält $P \cdot M(f;\varrho,1,-1) \cdot S = M(\varrho)$ mit Matrizen $M(f;\varrho,1,-1)$ der Art (15) und $\varrho = gh^{-1}$, $M(\varrho)$ der Art (16). Mit den Hilfssätzen 5.3, 5.4 folgt die Behauptung.

Hilfssatz 5.6 : Für zwei verschiedene Teiler ϱ_1, ϱ_2 von f sind $M(\varrho_1), M(\varrho_2)$ der in (16) gekennzeichneten Art nicht $(\Psi(2,F),1)$-äquivalent.

Beweis : Wir führen einen Widerspruchsbeweis: Man nehme die Äquivalenz von $M(\varrho_1), M(\varrho_2)$ an, d.h., es gelte $PM(\varrho_1) = M(\varrho_2)S$ mit

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & k_1 f \\ k_2 f & a_{22} & k_3 f & k_4 f \\ c_{11} & c_{12} & d_{11} & k_5 f \\ c_{21} & k_6 f^{-1} & d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \in \Psi(2,F),$$

also $a_{ik}, b_{11}, c_{ik}, d_{ik}, k_\nu$ $(\nu = 1,..,6)$, f ganz und

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \varkappa & \beta_{21} & \beta_{22} \\ \gamma_{11} & 0 & \delta_{11} & \delta_{12} \\ 0 & 0 & 0 & \varkappa^{-1} \end{pmatrix} \quad \Sigma_1(2,R)$$

Ferner sei o.B.d.A. $\varrho_2 > \varrho_1$.

Es folgt durch Komponentenvergleich :

(i) $\varkappa, \varrho\beta_{12} + \varkappa^{-1}$, β_{12} sind ganz, also $\varkappa^{-1}$ ganz, mithin $\varkappa, \varkappa^{-1} = \pm 1$.

(ii) $\varrho_1 d_{21} - d_{22} = -\alpha_{11}$, $\varrho_1 d_{11} = \varrho_2 \alpha_{11} + k_5 f$,

$d_{11} = \varrho_2 \beta_{12} + \varkappa^{-1}$.

Hieraus folgt $d_{22} = \varrho_1 d_{21} + \varrho_1 \beta_{12} - k_5 f \varrho_2^{-1} + \varrho_2^{-1} \varrho_1$,

also $\varrho_2^{-1}\varrho_1$ ganz im Widerspruch zur Annahme $\varrho_2 > \varrho_1$.

Folglich repräsentieren die Matrizen der Art (16) für verschiedene Teiler ϱ_1, ϱ_2 von f auch verschiedene $(\Psi(2,F),1)$-Äquivalenzklassen.

Satz :

Sei $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$, $f = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$ die Primzerlegung einer natürlichen Zahl f. Dann ist die Anzahl der 1-Spitzen von $\Psi(2,F) = [F,E]\,\Gamma(2,F)\,[F,E]^{-1}$

$$A\,(\Psi(2,F),1) = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1).$$

Beweis : Nach Hilfssatz 5.6 gibt es genau so viele verschiedene $(\Psi(2,F),1)$-Äquivalenzklassen wie Teiler von f. Daraus folgt die Behauptung.

LITERATUR

[1] CHRISTIAN,U : Einführung in die Theorie der paramodularen Gruppen
Math.Ann.168,59-104 (1967)

[2] - : Über die Anzahl der Spitzen Siegelscher Modulgruppen
Hamb.Abh.32,55-60 (1968)

[3] KOECHER,M. : Zur Theorie der Modulformen n-ten Grades I
Math.Zeitschr.59,399-416 (1954)

[4] - : Zur Theorie der Modulformen n-ten Grades II
Math.Zeitschr.61,455-466 (1955)

[5] KLINGEN,H. : Bemerkungen über Kongruenzgruppen der Modulgruppe n-ten Grades
Archiv d.Math.10,113-125 (1959)

LEBENSLAUF

Ich heiße Helmut Reefschläger und bin am 8.4.1944 in Königsberg/Neumark als Sohn des Kaufmanns Werner Reefschläger und seiner Frau Elisabeth,geb.Woller, geboren.Im Frühjahr 1965 bestand ich das Abitur am Staatlichen Aufbaugymnasium Petershagen/Weser.Nach Ableisten des Wehrdienstes nahm ich im Sommersemester 1967 das Studium der Mathematik in Göttingen auf,wo ich im Sommer 1971 das Diplom-Examen bestand.